模块三 导数常规题型

第 1 节 函数图象切线的计算（★★）

强化训练

1．（2023・河南商丘模拟・★）已知函数 $f(x)=x+4\sin x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为（　　）

（A）$5x-y=0$　（B）$5x+y=0$　（C）$x-5y=0$　（D）$x+5y=0$

答案：A

解析：$f'(x)=1+4\cos x\Rightarrow f'(0)=5$，又 $f(0)=0$，所以所求切线为 $y-0=5(x-0)$，整理得：$5x-y=0$.

2．（2023・全国乙卷（改）・★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$．当 $a=-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

答案：$(\ln 2)x+y-\ln 2=0$

解析：当 $a=-1$ 时，$f(x)=(\frac{1}{x}-1)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+(\frac{1}{x}-1)\cdot\frac{1}{1+x}$，

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-\ln 2$，故所求切线方程为 $y-0=(-\ln 2)(x-1)$，整理得：$(\ln 2)x+y-\ln 2=0$.

3．（2023・四川模拟・★★）设函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为（　　）

（A）e　（B）$\frac{e}{2}$　（C）$\frac{e}{4}$　（D）$\frac{e}{8}$

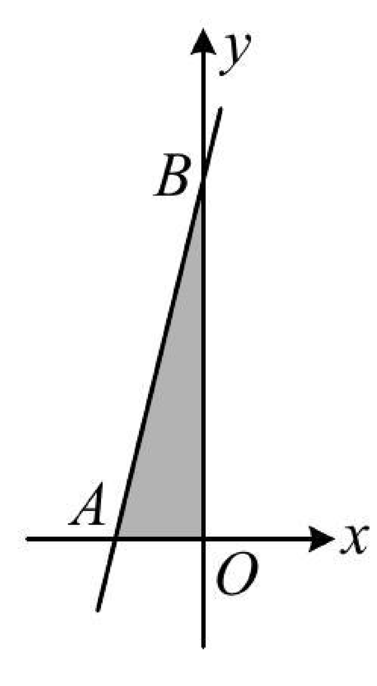
答案：C

解析：由题意，$f'(x)=\frac{e^x-e^x\cdot x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$，所以 $f'(-1)=\frac{2}{e^{-1}}=2e$，又 $f(-1)=\frac{-1}{e^{-1}}=-e$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y-(-e)=2e[x-(-1)]$，整理得：$y=2ex+e$，

如图，要求 ΔAOB 的面积，应先求 A，B 两点的坐标，

$\begin{cases}y=2ex+e\\x=0\end{cases}\Rightarrow y=e\Rightarrow B(0,e)$，$\begin{cases}y=2ex+e\\y=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A(-\frac{1}{2},0)$，所以 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\times e\times\frac{1}{2}=\frac{e}{4}$.



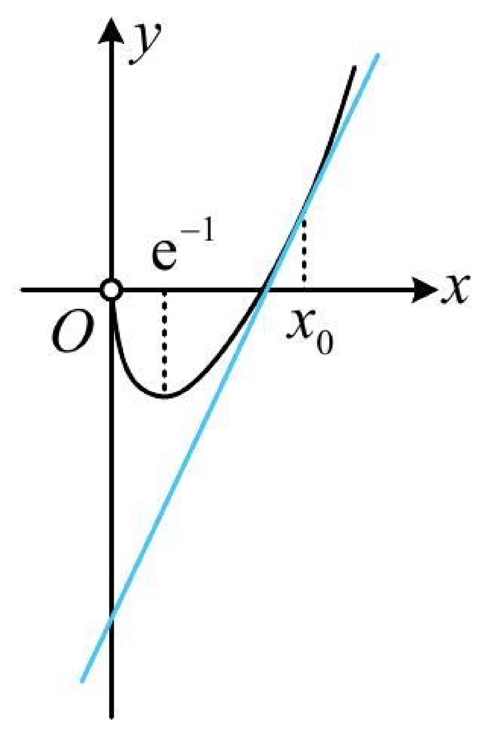
4．（2022·四川成都模拟·★★）直线 $y=kx-2$ 与曲线 $y=x\ln x$ 相切，则实数 $k=$_____.

答案： $1+\ln 2$

解析： 因为不知道切点，所以先设切点坐标，设切点为 $(x_0,x_0\ln x_0)$，由题意，$(x\ln x)'=1+\ln x$，

如图，应有 $\begin{cases}1+\ln x_0=k \ ①(x_0\text{处的导数与切线斜率相等})\\ kx_0-2=x_0\ln x_0 \ ②(x_0\text{处是切线和函数图象的交点})\end{cases}$，

将①代入②消去 k 得：$(1+\ln x_0)x_0-2=x_0\ln x_0$，解得：$x_0=2$，所以 $k=1+\ln 2$.



5．（2022·全国甲卷（改）·★★）已知函数 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，若 $x_1=-1$，则实数 a 的值为_____.

答案： 3

解析： 由于 $x_1=-1$，故该切线与 $f(x)$ 的切点已知，可由此求出切线的方程，

由题意，$f(-1)=0$，$f'(x)=3x^2-1$，所以 $f'(-1)=2$，

故当 $x_1=-1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y=2(x+1)$，

由题意，直线 $y=2(x+1)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，

接下来由此求 a，由于不知道切点，故设切点，

设直线 $y=2(x+1)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相切于 $x=x_0$ 处，

则 $\begin{cases}x_0^2+a=2(x_0+1)(\text{切点是公共点})\\ 2x_0=2(\text{切点处的导数等于切线斜率})\end{cases}$，解得：$a=3$.

6．（2023·河北模拟·★★）曲线 $y=x^2$ 过点 $P(3,5)$ 的切线方程为_____.

答案： $y=2x-1$ 或 $y=10x-25$

解析： 要求的是过点 P 的切线，故不知道切点，于是先设切点，写出切线方程，

设切点为 $Q(x_0,x_0^2)$，$(x^2)'=2x\Rightarrow y=x^2$ 在点 Q 处的切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$ ①，

将 $P(3,5)$ 代入①得：$5-x_0^2=2x_0(3-x_0)$，解得：$x_0=1$ 或 5，

代回①整理得所求切线的方程为 $y=2x-1$ 或 $y=10x-25$.

7．（2019·江苏卷·★★★）点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e,-1)$，则点 A 的坐标是_____.

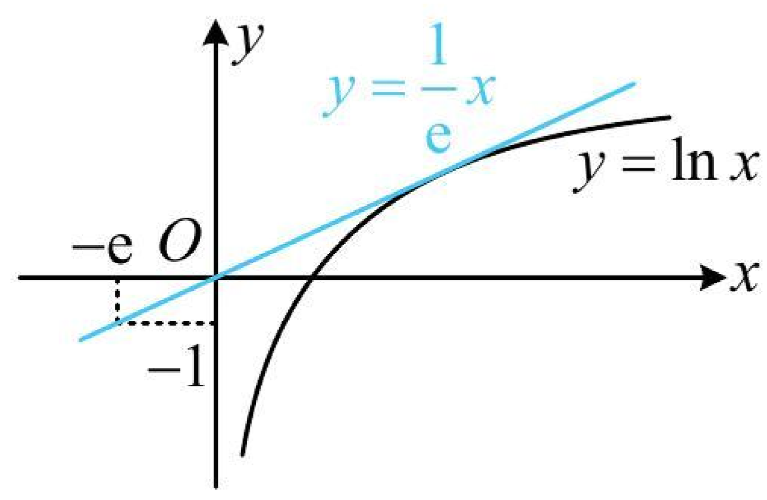
答案： $(e,1)$

解析：设 $A(x_0,\ln x_0)$，因为 $y'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 A 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(-\mathrm{e},-1)$ 代入得：$-1-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(-\mathrm{e}-x_0)$，整理得：$x_0\ln x_0=\mathrm{e}$①，

观察可得 $x_0=\mathrm{e}$ 是方程①的解，这个方程还有其它解吗？可以画图看看，

如图，过点 $(-\mathrm{e},-1)$ 只能作曲线 $y=\ln x$ 的 1 条切线，所以 $x_0=\mathrm{e}$ 是方程①的唯一解，故点 A 的坐标是 $(\mathrm{e},1)$.



8．（2022・安徽亳州模拟・★★★）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在点 $(-\dfrac{1}{2},f(-\dfrac{1}{2}))$ 处的切线方程为_____.

答案：$y=2x+4$

解法 1：偶函数中，已知 $x>0$ 时的解析式，可先求出 $x<0$ 时的解析式，

因为 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)=\mathrm{e}^{-2x-1}-\dfrac{1}{x}$，

故 $f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x-1}+\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f(-\dfrac{1}{2})=3$，$f'(-\dfrac{1}{2})=2$，故所求切线方程为 $y-3=2[x-(-\dfrac{1}{2})]$，即 $y=2x+4$.

解法 2：也可直接由 $x>0$ 的解析式求 $f'(\dfrac{1}{2})$，再用偶函数的对称性得出 $f'(-\dfrac{1}{2})$，

由题意，当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x-1}-\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f'(\dfrac{1}{2})=-2$，

又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-\dfrac{1}{2})=-f'(\dfrac{1}{2})=2$，（理由见本节例 1 变式 2 的反思）且 $f(-\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})=3$，

故所求切线方程为 $y-3=2[x-(-\dfrac{1}{2})]$，化简得：$y=2x+4$.

9．（2022・新高考 I 卷・★★★）若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

解析：设切点为 $P(x_0,(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0})$，由题意，$y'=(x+a+1)\mathrm{e}^x$，

所以曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 在点 P 处的切线的方程为 $y-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$ ①，

将原点 $(0,0)$ 代入①可得 $-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+a+1)\mathrm{e}^{x_0}\cdot(-x_0)$，整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

所给曲线有两条过原点的切线等价于上述关于 x_0 的方程有两个实数解，

所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得：$a<-4$ 或 $a>0$.

10．（2022・浙江金华期末・★★★★）已知函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象在点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线

互相垂直且交于点 $P(x_0,y_0)$，则（　　）

（A）$x_1x_2=-1$　　（B）$x_1x_2=\mathrm{e}$　　（C）$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$　　（D）$x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$

答案：D

解析：先画图看看两个切点的位置，如图，要使两切线垂直，则两个切点分别在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上，

因为 $f(x)=|\ln x|$，所以 $f(x)=\begin{cases}-\ln x,0<x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，故 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x},0<x<1\\ \dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$，

不妨设 $P_1(x_1,-\ln x_1)$，$P_2(x_2,\ln x_2)$，且 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，

要寻找 x_1，x_2 的关系，可翻译切线垂直这一条件，

因为两切线互相垂直，所以 $f'(x_1)f'(x_2)=-\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=-1$，从而 $x_1x_2=1$，故选项 A、B 均错误；

要判断 C、D 两个选项，得求出两切线的交点 P 的横坐标 x_0，可写出两切线的方程，联立求解，

点 P_1 处的切线方程为 $y-(-\ln x_1)=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，整理得：$y=-\dfrac{1}{x_1}x+1-\ln x_1$ ①，

点 P_2 处的切线方程为 $y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，整理得：$y=\dfrac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$ ②，

联立①②解得：$x=(2-\ln x_1-\ln x_2)\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$，结合 $x_1x_2=1$ 可得 $x=\dfrac{2}{x_1+x_2}$，即 $x_0=\dfrac{2}{x_1+x_2}$，故选 D.